Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.

Problème 1

(D'après Maths C, Banque PT 2018)

Le but de ce problème est de montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$:
$$|f'(t)| \leqslant M.$$
2. Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\lim_{k\to+\infty,k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t = 0.$$

Partie I

On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

4. Quelle valeur faut-il attribuer à $f(0)$ pour prolonger par continuité f sur $[0, +\infty[$?
On désigne encore par f la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que, pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant 1$.
6. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
7. On définit la fonction F de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
Montrer que, pour $x > 0$,
$$F(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

8. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.
9. En utilisant le changement de variable $t = 2s$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\mathrm{d}t.$$

10. (a) Déterminer :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan t} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}$$

    (b) Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.
    (c) Que vaut I_1 ?
    (d) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :

$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$

    en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.
    (e) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).
11. Étudier la convergence des intégrales J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$,
12. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

    est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
13. Que vaut : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n - I_n$? *On pensera à utiliser le Préambule.*
14. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

    (on pourra utiliser un changement de variable).
15. Conclure

Problème 2

(adapté de Centrale 2015 et CCINP 2007)

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

Si f est un endomorphisme de E et F est un sous-espace vectoriel de E on dit que F est stable par f lorsque

$$\forall x \in F, \qquad f(x) \in F$$

Pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.

Partie I — Quelques généralités

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. (a) Montrer que E, $\{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.
   (b) Montrer que, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces stables par f alors $F_1 + F_2$ l'est également.
2. (a) Soit $x \in E$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$, montrer que $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par f.
   (b) Réciproquement montrer que, si $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par f, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
   (c) Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace stable par f
   (d) Montrer que s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$, alors il existe une infinité de droites de E stables par f.
3. (a) Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
   On pourra considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (y, -x)$.
   (b) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
   (c) Déterminer les sous-espaces stables de l'endomorphisme canoniquement associé à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
4. On suppose **dans cette question uniquement** que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.

   Soit x et y deux vecteurs non nuls de E
   (a) Montrer que si x et y sont colinéaires, alors il existe un réel α tel que $f(x) = \alpha x$ et $f(y) = \alpha y$.
   (b) Montrer que si (x, y) est libre, alors il existe un réel α' tel que $f(x + y) = \alpha'(x + y)$ et $f(y) = \alpha' y$ et $f(x) = \alpha' x$.
   (c) Que dire alors de f ?

Partie II — Un exemple en dimension 3

On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

5. Montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-1, 1\}$.
6. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A + I_3)) = 1$ et déterminer une base w de $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$
7. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 2$ et déterminer une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$
8. Déterminer six espaces stables par φ différent de $\mathbb{R}^3$ et $\{(0, 0, 0)\}$; on explicitera une base de chacun de ces espaces à l'aide des vecteurs v_1, v_2 et w.

Partie III — Quelques exemples géométriques

9. Pour cette question uniquement on prendra $E = \mathbb{R}^2$.

   Déterminer à l'aide de considérations **géométriques** les **droites stables** ainsi que leur nombre des endomorphismes suivants :

   (a) La symétrie par rapport à la droite D_1 d'équation $x + y = 0$ parallèlement à la droite D_2 d'équation $x - y = 0$.

   (b) La rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ dans le sens trigonométrique direct.

   (c) L'homothétie de rapport 2.

Partie IV

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, tel qu'il existe un entier p et un p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts vérifiant

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $E_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$ et $E_i \neq \{0_E\}$.

10. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

    (a) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est stable par f.

    (b) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F.

    Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

    (c) Si on pose $H_x = \{i \in [\![1, p]\!] \,|\, x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les espaces vectoriels E_i, on peut supposer que $H_x = [\![1, r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1, r]\!]$.

    On pose $V_x = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.

    Montrer que $\mathscr{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x.

    (d) Montrer que pour tout j de $[\![1, r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$.

    (e) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

    (f) En déduire que pour tout i de $[\![1, r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

11. Dans cette question, on se place dans le cas où $p = n$.

    (a) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1, p]\!]$.

    (b) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

    (c) Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

    (d) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Préambule

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, sa dérivée f' est continue sur ce segment. D'après le théorème des bornes atteintes, f' est donc bornée sur $[a,b]$.

   Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $t \in [a,b]$, $|f'()| \leqslant M$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|f'(t)\mathrm{e}^{ikt}\right| = |f'(M)| \leqslant M$$

   D'où, par inégalité triangulaire pour les intégrales

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b \left|f'(t)\mathrm{e}^{ikt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)M}{k}$$

   Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{M\,(b-a)}{k} = 0$,, d'où

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

3. Les fonctions $t \mapsto f\,(t)$ et $t \mapsto g\,(t) = \mathrm{e}^{ikt}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_a^b f\,(t)\,g'\,(t)\,\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'\,(t)\,g\,(t)\,\,\mathrm{d}t$$

   c'est-à-dire

$$ik\int_a^b f\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ikb}f\,(b) - \mathrm{e}^{ika}f\,(a) - \int_a^b f'\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$$

   ou encore, pour k entier naturel non nul :

$$\int_a^b f\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{ikb}f\,(b) - \mathrm{e}^{ika}f\,(a)}{ik} - \frac{1}{ik}\int_a^b f'\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$$

   Et donc, par inégalité triangulaire

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f\,(b)\,|}{k} + \frac{|f\,(a)\,|}{k} + \frac{1}{k}\left|\int_a^b f'\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right|$$

   En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f\,(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Intégrale

Notons que l'on travaille ici avec l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, il s'agit donc d'une intégrale convergente.

Classique

Ce résultat, connu sous le nom de Lemme de Riemannn-Lebesgue est assez classique, il est bon de l'avoir déjà vu et de savoir le reprouver.

Partie I

4. On a $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 1$ et ainsi $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$

   Ainsi $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 1.}$

5. On a $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc pour $x > 0$, $|\sin(x)| \leqslant x$, d'où :

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{|\sin(x)|}{x} \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

D'autre part $f(0) = 1$ donc $|f(0)| \leqslant 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0, \text{ on a } |f(x)| \leqslant 1}$.

6. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} = f^2(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

— *Étude en* 0 : f est continue en 0 donc f^2 l'est également ainsi f^2 est intégrable au voisinage de 0.

— *Étude en* $+\infty$: pour $t > 0$, on a $|\sin(t)| \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable

Ainsi $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

7. Pour $x > 0$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Cette intégrale, généralisée en 0, existe d'après la question 11.

On utilise une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = 1/t$ sur $]0, +\infty[$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ et, pour $t > 0$, on a $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.

De plus

$$u(t)v(t) = \frac{1-\cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{t} = \frac{t}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^x - \int_0^x (1-\cos(t)) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\cos(x)}{x} - 0 + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad F(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t}$$

8. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente en 0 d'après la question 11..

De plus, pour $x > 0$, on a $F(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x} + \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

— *Étude du premier terme :* Pour $x > 0$, on a $\left|\dfrac{1-\cos(x)}{x}\right| = \dfrac{|1-\cos(x)|}{x} \leqslant \dfrac{2}{x}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

— *Étude du second terme :*

On sait que $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$, ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 et donc converge.

En $+\infty$, on a $0 \leqslant 1-\cos(t) \leqslant 2$, donc $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$.

Or $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ aussi.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$

Comme les deux termes de l'expression de $F(x)$ ont des limites finies quand $x \to +\infty$, on en déduit que $F(x)$ aussi.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

9. Avec la question précédente, on a directement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

On pose $\varphi : s \mapsto 2s$. φ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

Par changement de variables on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2s)}{4s^2}\,2\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2s)}{2s^2}\,\mathrm{d}s$$

Et comme $1-\cos(2s) = 2\sin^2(s)$, on a donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t}$$

Partie II

10. (a) i. On a, par équivalents usuels,

$$\frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2nt}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 2n$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} = 2n.}$

ii. On a : $\displaystyle\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \sin(2nt) = \sin(n\pi) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty$, d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} = 0.}$

iii. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2nt)}{\tan(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'après les questions précédentes, elle se prolonge par continuité en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. L'intégrale I_n est donc faussement impropre. Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$

(b) Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\frac{\sin(2t)}{\tan(t)} = \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} = 2\cos^2(t) = 1+\cos(2t) =$$

Ainsi

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}.}$

(c) On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin((2n+2)t) - \sin(2nt) &= \sin((2n+1)t + t) - \sin((2n+1)t - t)\\ &= \sin((2n+1)t)\cos(t) + \cos((2n+1)t)\sin(t) - (\sin((2n+1)t)\cos(t) - \cos((2n+1)t)\sin(t))\\ &= 2\cos((2n+1)t)\sin(t)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin(t).}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right)}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin(t)}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, de manière similaire à la question 1.(c), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t = \cos\left((2n+2)\,t\right) + \cos\left(2nt\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((2n+2)\,t\right) + \cos\left(2nt\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\sin\left((2n+2)\,t\right)}{2\,(n+1)} + \frac{\sin\left(2nt\right)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien constante.

Or $I_1 = \frac{\pi}{2}$, ainsi $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \text{ est constante égale à } \frac{\pi}{2}.}$

11. soit $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(pt)}{t}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus $\dfrac{\sin(pt)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} p$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(pt)}{t}$ se prolonge donc par continuité en 0 avec la valeur p.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(pt)}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre donc convergente .

C'est en particulier vrai pour $p = 2n$ avec n entier naturel non nul. Donc $\boxed{\text{les intégrales } (J_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont convergentes.}}$

12. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que différence de fonction de classe $\mathcal{C}^1$

On a $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \phi(t) = \dfrac{2}{\pi}$, ainsi ϕ se prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur $\dfrac{2}{\pi}$.

Pour $t \neq 0$ on a

$$\phi(t) = \frac{\tan(t) - t}{t\tan(t)} \underset{t\to 0}{=} \frac{t + \frac{t^3}{3} - t}{t\tan(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^3}{3}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{3}$$

Ainsi $\lim\limits_{t\to 0} \phi(t) = 0$, ϕ se prolonge donc en une fonction $\widetilde{\phi}$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\widetilde{\phi}$ est de plus C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\widetilde{\phi}'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1+\tan^2(t)}{\tan^2(t)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(t)} - \frac{1}{t^2}$$

On a alors $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}'(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$. Ainsi d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\widetilde{\phi}'$ est continue en $\frac{\pi}{2}$ et $\widetilde{\phi}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

De plus, pour $t \neq 0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}'(t) &= 1 + \frac{1}{\tan^2(t)} - \frac{1}{t^2} \\
&= 1 + \frac{t^2 - \tan^2(t)}{t^2\tan^2(t)} \\
&\underset{t\to0}{=} 1 + \frac{t^2 - \left(t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)\right)^2}{t^2\tan^2(t)} \\
&\underset{t\to0}{=} 1 + \frac{t^2 - \left(t^2 + \frac{2t^4}{3} + o(t^4)\right)}{t^2\tan^2(t)} \\
&\underset{t\to0}{=} 1 - \frac{2}{3}\frac{t^4 + o(t^4)}{t^2\tan^2(t)}
\end{aligned}$$

Or $\frac{2}{3}\frac{t^4+o(t^4)}{t^2\tan^2(t)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{2}{3}\frac{t^4}{t^4} \underset{t\to0}{\sim} \frac{2}{3}$.

⚠Attention

On ne somme pas les équivalents, il n'était donc pas possible d'écrire que $1 - \frac{2}{3}\frac{t^4+o(t^4)}{t^2\tan^2(t)} \underset{t\to0}{\sim} 1 - \frac{2}{3}$

Ainsi $\lim\limits_{t\to0} \frac{2}{3}\frac{t^4+o(t^4)}{t^2\tan^2(t)} = \frac{2}{3}$ et donc $\lim\limits_{t\to0} \widetilde{\phi}'(t) = \frac{1}{3}$

D'où, d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\widetilde{\phi}'$ est continue en 0 et $\widetilde{\phi}'(0) = \frac{1}{3}$.

Finalement $\boxed{\text{le prolongement } \widetilde{\phi} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{sur } [0, \pi/2].}$

13. Puisque $\widetilde{\phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, \pi/2]$, alors d'après le résultat de la question 3. du préambule, la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}(t)\, \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t$$

converge vers 0, par conséquent, la suite extraite $(\alpha_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 0.

Par continuité de la fonction $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, on en déduit que la suite $(\mathrm{Im}(\alpha_{2n}))$ converge vers $\mathrm{Im}(0) = 0$.

Continuité

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a $|\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')| \leqslant |z - z'|$. La fonction $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ est donc 1-Lipschtizienne et, par conséquent, continue.
On aurait ici aussi pu utiliser le théorème des gendarmes puisque $0 \leqslant \mathrm{Im}(\alpha_{2n}) \leqslant |\alpha_{2n}|$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Im}(\alpha_{2n}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Im}\left(\widetilde{\phi}(t)\, \mathrm{e}^{int}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}(t) \sin(2nt)\, \mathrm{d}t = J_n - I_n$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - I_n) = 0.}$

14. On va poser le changement de variable $u = 2nt$, la fonction $\varphi : t \mapsto 2nt$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\varphi'(t) = 2n$

Le théorème de changement de variables nous assure alors que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u$ ont même nature et sont égales en cas de convergence.

On a montré à la question 2. que $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\, \mathrm{d}t$ converge, ainsi $\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u$ converge et

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}$$

15. D'après la question 1.(d), on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 2

Partie I

1. (a) Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont stables par f car f est un endomorphismes de E.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ est donc stable par f.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ est donc stable par f.
Ainsi $\boxed{E,\ \{0_E\},\ \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont des sous-espaces stables par } f.}$

(b) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces stables par f.
Soit $x \in F_1 + F_2$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Alors

$$f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{\in F_1} + \underbrace{f(x_2)}_{\in F_2} \in F_1 + F_2$$

$\boxed{F_1 + F_2 \text{ est donc stable par } f.}$

2. (a) Soit $x \in E$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Comme $x \neq 0_E$ alors $\mathrm{Vect}(x)$ est bien une droite vectorielle de E.
Soit $y = \alpha x \in \mathrm{Vect}(x)$, alors $f(y) = \alpha f(x) = \lambda\alpha x \in \mathrm{Vect}(x)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x) \text{ est une droite vectorielle de } E \text{ stable par } f.}$

(b) Soit $x \in E$ non-nul tel que $\mathrm{Vect}(x)$ soit stable par f.
Ainsi $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$, $\boxed{\text{il existe donc un scalaire } \lambda \text{ tel que } f(x) = \lambda x.}$

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$ (i.e. $f(x) = \lambda x$).
Alors $f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$ d'où $f(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \text{ est un sous-espace stable par } f.}$

(d) Soit $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ un sous-espace de dimension au moins 2.
Alors il existe e_1 et e_2 deux vecteurs propres non colinéaires éléments de $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.
Soit α de $\mathbb{K}$, on a

$$f(e_1 + \alpha e_2) = f(e_1) + \alpha f(e_2) = \lambda(e_1 + \alpha e_2)$$

Ainsi la droite vectorielle $D_\alpha = \mathrm{Vect}(e_1 + \alpha e_2)$ est stable par f.
Soit α et α' deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Alors les droites D_α et $D_{\alpha'}$ sont distinctes.
Ainsi $\boxed{\text{il existe alors une infinité de droites } D_\alpha \text{ stables par } f.}$

3. (a) Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont stables par f. De plus $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Si f admet un troisième sous-espace stable F alors F est une droite. Notons $u = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul engendrant F.

Il existe alors un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$. Donc $u_2 = \lambda u_1$ et $u_1 = -\lambda u_2$. On en déduit que $(1 + \lambda^2)u_2 = 0$. Donc $u_2 = 0$ puis $u_1 = 0$ et ainsi $u = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

(b) — $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par f.
Or f est non nul et non injectif. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ n'est ni E ni $\{0\}$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ est un troisième sous-espace stable.
Si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont distincts, alors f admet quatre sous-espaces stables.

— Si n est impair, d'après le théorème du rang $\mathrm{Rg}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = n$ impair.
Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Im}(f)$.
Ainsi si n est impair, f admet au moins 4 sous-espaces stables.

(c) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$. Donc f admet trois sous-espaces stables.

Si f admet un autre sous-stable différent de E et de $\{0\}$, alors ce sous-espace stable est de dimension 1 donc engendré par un vecteur $u = (u_1, u_2)$.

Alors $f(u)$ s'écrit $\lambda(u_1, u_2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ mais également $f(u) = (u_2, 0)$.

Ainsi $u_1 = u_2 = 0$. Donc $u \in \mathrm{Ker}(f)$.

Finalement f admet exactement trois sous-espaces stables.

4. Soit f un endomorphisme de E dont tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.
En particulier toutes les droites vectorielles sont stables par f.
Alors pour tout $x \in E$ avec $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Soit deux vecteurs non nuls x et y de E.

(a) Si x et y sont colinéaires, alors il existe un scalaire α tel que $y = \alpha x$.
alors

$$f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$$

d'où $\lambda_y = \lambda_x$ car y est non nul.

Ainsi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$ et $f(y) = \alpha y$.

(b) On suppose que la famille (x, y) est libre. Alors

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \qquad \text{et} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Ainsi $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x = (\lambda_y - \lambda_{x+y})y$.

Or la famille (x, y) est libre. Donc $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$.
Ainsi $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi il existe $\alpha' \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha' x$, $f(y) = \alpha' y$ et $f(x+y) = \alpha'(x+y)$.

(c) On a montré il existe un scalaire λ tel que

$$\forall x \in E, x \neq 0, \qquad f(x) = \lambda x$$

Et cette égalité reste évidemment valable lorsque $x = 0$. Donc f est une homothétie.

Partie II — Un exemple en dimension 3

Déterminant

On peut également calculer le déterminant de $A - \lambda I_3$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on va déterminer le rang de $A - \lambda I_3$.

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1-\lambda & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ -1-\lambda & 2\lambda-2 & 3-2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 + (1+\lambda)C_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 2(\lambda-1) & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \end{aligned}$$

$A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si son rang vaut 3. D'après le calcul précédent c'est le cas si et seulement si $1 - \lambda \neq 0$ et $(1+\lambda)^2 \neq 0$.

Ainsi $\boxed{A - \lambda I_3 \text{ est inversible si et seulement si } \lambda \notin \{-1, 1\}.}$

6. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A + I_3)) = 3 - \mathrm{Rang}(A + I_3)$. Le calcul de la question précédente nous donne $\mathrm{Rang}(A + I_3) = 2$ ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A + I_3)) = 1.}$

Une résolution de système linéaire nous donne $\mathrm{Ker}(A + I_3)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $\boxed{w = (1, 1, -2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}).}$

7. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 3 - \mathrm{Rang}(A + I_3)$. Le calcul de la question 5. nous donne $\mathrm{Rang}(A - I_3) = 2$ ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1.}$

Une résolution de système linéaire nous donne $\mathrm{Ker}(A - I_3)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $\boxed{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (0, 1, -2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}).}$

8. On va exploiter les résultats de la partie I.

D'après la question 2.(a), $\mathrm{Vect}(w)$, $\mathrm{Vect}(v_1)$ et $\mathrm{Vect}(v_2)$ sont des droites vectorielles stables par φ.

De plus, d'après la question 1.(b), $\mathrm{Vect}(w, v_1)$, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, w)$ sont des sous-espaces stables par φ.

$\boxed{\text{Ainsi } \mathrm{Vect}(w),\ \mathrm{Vect}(v_1),\ \mathrm{Vect}(v_2),\ \mathrm{Vect}(w, v_1),\ \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \text{ et } \mathrm{Vect}(v_2, w) \text{ sont des sous-espaces stables par } \varphi.}$

Partie III — Quelques exemples géométriques

9. (a) Si D est une droite de $\mathbb{R}^2$ alors son image par la symétrie par rapport à la droite D_1 d'équation $x + y = 0$ parallèlement à la droite D_2 d'équation $x - y = 0$ est égale à D si et seulement si D est égale soit à D_1, soit à D_2.

$\boxed{\text{Ainsi la symétrie par rapport à la droite } D_1 \text{ d'équation } x + y = 0 \text{ parallèlement à la droite } D_2 \text{ d'équation } x - y = 0 \text{ admet seulement deux droites stables : } D_1 \text{ et } D_2.}$

(b) Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{v}$ est l'image de $\overrightarrow{u}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct alors l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont donc pas colinéaires, donc la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u}$ n'est pas stable.

$\boxed{\text{Ainsi la rotation d'angle } \frac{\pi}{4} \text{ dans le sens direct n'admet pas de droites stables.}}$

(c) L'homothétie de rapport 2 est l'endomorphisme $2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ pour lesquels $\boxed{\text{toutes les droites vectorielles de } \mathbb{R}^2 \text{ sont stables.}}$

Partie IV

10. (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$.

Soit x un élément de F. Alors il existe un unique p uplet $(x_1, \cdots x_p)$ de $(F \cap E_1) \times \cdots \times (F \cap E_p)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

D'où, par linéarité $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)$.

Or $x_i \in E_i$. Donc $f(x_i) = \lambda_i x_i$. Ainsi $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

Les F_i étant des sous-espaces vectoriels on a, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i x_i \in F \cap E_i$. Donc $f(x) \in \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ ou encore $f(x) \in F$.

Donc F est stable par f.

(b) Par hypothèse $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

x est aussi un élément de E. Ainsi il existe une unique famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

(c) ⋆ Par définition la famille $\mathscr{B}_x$ est une famille génératrice de V_x.

⋆ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ la famille (x_i) est libre.

Les sous-espaces E_1, $\cdots$, E_r sont en somme directe donc une concaténation de familles libre de chaque E_i est une famille libre de la somme.

Ainsi la famille $(x_1, \cdots x_r)$ est libre.

Finalement la famille $\mathscr{B}_x$ est une base de V_x.

(d) Pour $i \in [\![1, r]\!]$ on a $f(x_i) = \lambda_i x_i$. Une récurrence immédiate sur $j \in \mathbb{N}^*$ montre que $f^{j-1}(x_i) = \lambda^{j-1} x_i$

Par linéarité $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i$.

Donc $f^{j-1}(x) \in V_x$.

Alors la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$ est la matrice de Vandermonde d'ordre r suivante

$$W := W(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

(e) Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(W)$.

Notons $P = \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$. On a alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_r) = 0$.

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $r-1$ qui admet au moins r racines, c'est donc le polynôme nul. Aisi $A = 0$.

Puisque $\mathrm{Ker}(W) = \{0_{n,1}\}$ on en déduit que W est inversible et donc

$(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

(f) ◇ Soit i un élément de $[\![1, r]\!]$.
Comme W est inversible, x_i s'écrit comme combinaison linéaire de $f^{j-1}(x)$.
Or F est stable par f. Donc pour tout entier j, $f^{j-1}(x)$ est un élément de F.
Donc x_i est un élément de F.
Ainsi pour tout entier i de $[\![1, r]\!]$, $x_i \in F \cap E_i$.

◇ Ainsi pour tout vecteur x de F, $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ où $x_i \in F \cap E_i$.

Donc $F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

Or $\bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i) \subset F$. Donc $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

Finalement F est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

11. (a) Comme $p = n$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Donc $n = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_i \geqslant 1$.
Donc tous les sous-espaces E_i sont de dimension 1.

(b) Soit D une droite stable par f.
Alors il existe un vecteur u non nul et un réel λ tels que $f(u) = \lambda u$. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$.
Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E) = 1$. Donc $D = E_i$.
f admet donc exactement n droites stables .

(c) Soit F un sous-espace de E stable par f et de dimension k.
D'après la question 1., $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$.
Comme les E_i sont des droites, leurs sous-espaces $F \cap E_i$ sont soit nuls, soit égaux à E_i.
Enfin, comme $\dim F = k$, il y exactement k indices $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $F \cap E_i = E_i$, et les autres vérifient $F \cap E_i = \{0\}$.
F est donc entièrement déterminé par le choix de k indices i parmi n.
Donc il existe $\binom{n}{k}$ sous-espaces de E de dimension k et stables par f .

(d) Il suffit de les compter selon leur dimension $k \in [\![0, n]\!]$.
Il existe $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ sous-espaces de E stables par f.
Les sous-espaces stables par f sont $\bigoplus_{i \in K} E_i$, où K parcourt l'ensemble des parties finies de $[\![1, n]\!]$.